

1. Moderne design med Bézier-kurver og tredjegradspolynomier

Når man skal designe en ny bilmodel, en ny flytype, eller en ny skrifttype, har man brug for at kunne tegne bløde kurver. Her er det ikke nok med cirkelbuer. I 1960'erne voksede behovet for computerautomatiserede tegneprogrammer, der kunne hjælpe med at udforme sådanne designs. Man havde brug for en simpel fleksibel tegnerutine, der kunne hjælpe med at tegne de kurver, der indgik i den ønskede form. I kapitel 2 har vi set, at der findes en simpel geometrisk rutine for at tegne parabelbuer. I parabelrutinen tegner man med andengradskurver. Flere industrimatematikere fik nu uafhængigt af hinanden den ide, at man i stedet kunne få den ønskede fleksibilitet ved at bruge tredjegradskurver. Ferguson fra Boeing-fabrikkerne og Casteljau fra Citroen udviklede teknikken, men den blev holdt hemmelig, for at konkurrenterne ikke skulle kunne få glæde af den! I stedet blev det Bézier fra Renault-fabrikkerne, der som den første offentliggjorde teknikken, som i dag er gået sin sejrsgang og nu er implementeret i alle tegneprogrammer. Som vi skal se, er parabelrutinen en simpel forløber for Bézier-kurven, så vi starter med at se den i et nyt lys for bagefter at generalisere den til Bézier-kurven.



Før computernes tid tegnede man kurver ved at benytte lange fleksible metallinealer, der kunne formes til den ønskede kurve. Sådanne linealer kaldte man for *splines*. Når den ønskede form var fremkommet, holdt man linealen fast med en stribe *ducks*. Da processen ofte foregik på loftet af store fabrikshaller eller hangarer, kaldtes den *lofting*. Det var en langsom og omkostningsfuld affære, men var længe den eneste praktiske mulighed for at forme skibsskrog og lignende.

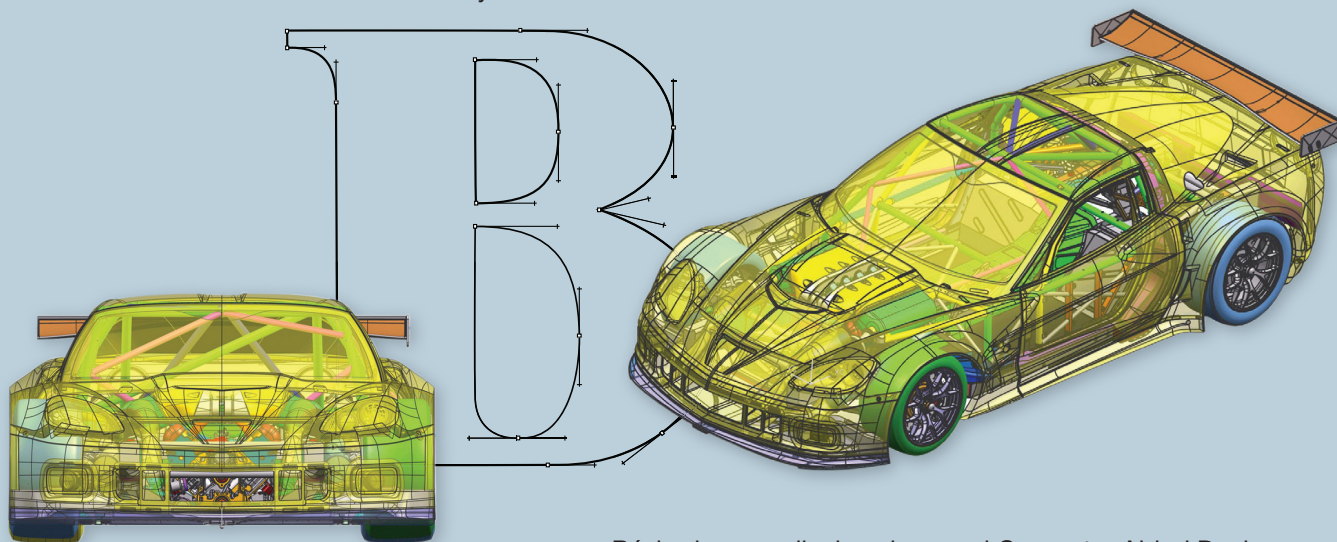
Alt dette ændredes radikalt, da Bézier udviklede sin nye tegnerutine:



I de tidlige 60'ere, hvor jeg arbejdede som ingeniør på Renault-fabrikkerne, gik jeg til min overordnede for at fortælle ham, at jeg havde fundet en helt ny matematisk metode til at tegne kurver; denne metode ville kunne erstatte alle de tidligere klodsede beregningsmetoder såvel som brugen af drejebænke til at forme modeller. Han så mit projekt, kiggede på mig, og sagde så: "Hr. Bézier, hvis dette virkede, ville Amerikanerne allerede være i gang med at bruge det".

Kilde: P. Bézier, How a simple System was born, Elsevier Science & Technology Books, 1988

Hvad hans overordnede ikke vidste, var at amerikanerne allerede var i gang med at bruge et lignende system på Boeing-fabrikkerne – men at de holdt det hemmeligt af konkurrencehensyn!

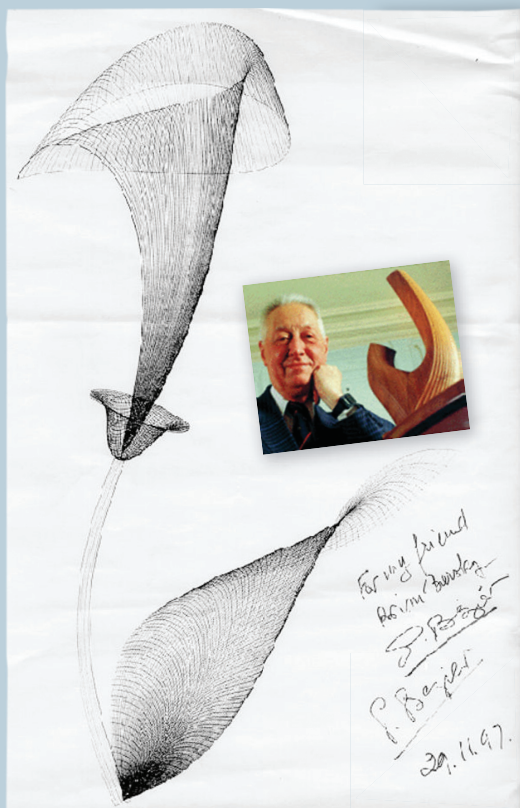


Bézier-kurven gik sin sejrsgang i Computer Aided Design. Først til industriel design, fx biler eller rumfærger, senere til helt andre områder som design af skrifttyper, de såkaldte postscripttyper, der kunne skaleres vilkårligt op og ned uden at miste formen. De udgør fundamentet for de såkaldte True Type skrifttyper, der bl.a. benyttes i pdf-filer.

Bézier blev således selv prototypen på den innovative kreative matematiker, der berigede verden med nye værktøjer til at frembringe æstetisk tilfredsstillende genstande.

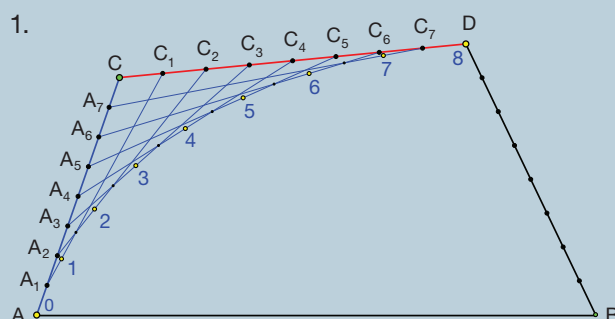
Det er vigtigt, at "fornuftige" mennesker en gang imellem giver frie tøjler til visionære mennesker. "Jeg fik succes," sagde Henry I. Ford, "fordi jeg lod nogle tåber afprøve deres ideer, som vise mennesker allerede havde rådet mig til ikke at lade dem afprøve."

Hvad er så matematikken bag Bézier-kurven? Vi så i et projekt i kapitel 2, hvordan man kan sy parabelbuer ved at indføre passende delepunkter undervejs. Det giver faktisk anledning til en Bézier-kurve af anden grad. Det er denne konstruktion, vi nu vil generalisere til Bézier-kurver af tredje grad. Først viser vi derfor, hvordan vi kan sy en Bézier-kurve, og derefter konstruerer vi den som en geometrisk kurve. Via bogens **website** er der adgang til sider, hvor du selv kan lege med Bézier-kurver af forskellig orden og derved få et indtryk af de designmæssige muligheder.



1.1 Syning af en Bézier-kurve

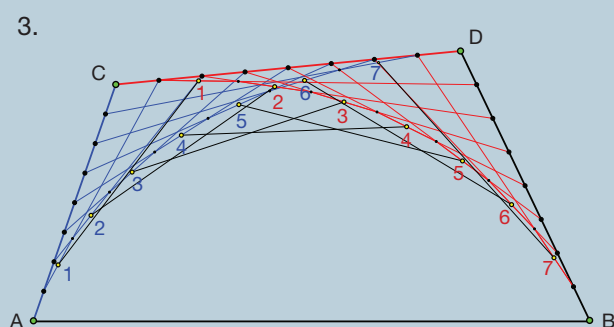
Man kan fx sy kurven med garn på et papstykke, men vi vil sy den i et dynamisk geometriprogram.



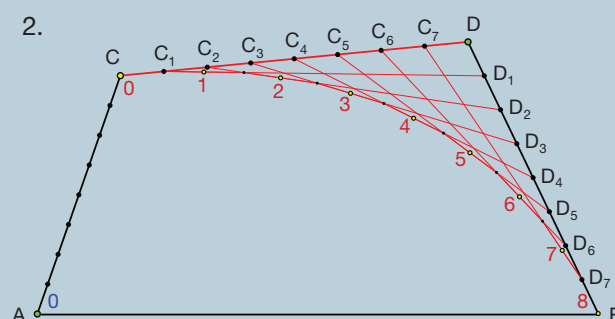
Først syr vi den blå parabel fra A til D over C ved at dele linjestykkerne AC og CD i 8 lige store stykker, og sy som følger:

Fra A til C, hvor vi stikker igennem og kommer op igen ved C_1 , og videre herfra til A_1 , hvor vi igen stikker igennem og kommer op igen ved A_2 , og videre herfra til C_2 osv. indtil vi til sidst kommer op igennem ved D.

Delepunkterne (gule) på parabeln, der er nummereret 0–8, er midtpunkterne mellem de blå snores yderste skæringspunkter, som er markeret med små sorte punkter på figuren.



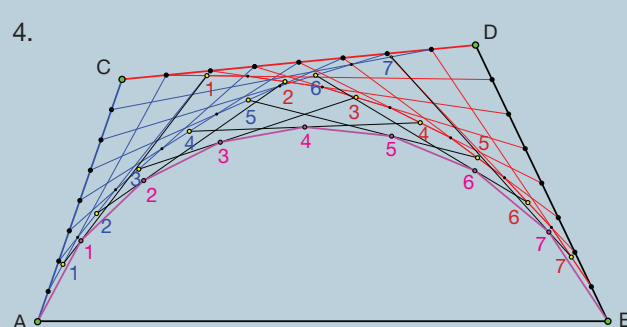
Vi forbinder nu det første blå parabelpunkt 1 med det første røde parabelpunkt 1 osv. Derved fremkommer de sorte snore, der indhyller Bézier-kurven, dvs. alle de sorte linjestykker er tangenter til Bézier-kurven. Man kan altså frembringe Bézier-kurven ved at lade et linjestykke glide passende langs de to parabler. Når vi kun benytter 8 delepunkter, bliver indhyllingen dog som vist lidt grov.



Derefter syr vi på samme måde den røde parabelbue fra C til B over D ved at dele linjestykkerne CD og DB i 8 lige store stykker, og sy som følger:

Fra C til D, hvor vi stikker igennem og kommer op igen ved D_1 , og videre herfra til C_1 , hvor vi igen stikker igennem og kommer op igen ved C_2 , og videre herfra til D_2 osv. indtil vi til sidst kommer op igennem ved B.

Delepunkterne (gule) på parabeln, nummereret 0–8, er midtpunkterne mellem de røde snores yderste skæringspunkter, som er markeret med små sorte punkter på figuren.



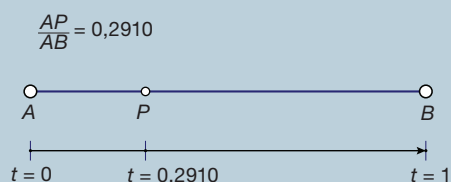
I det forrige trin syede vi sorte tangentstykker til indhyllningskurven. Hvis vi vil sy sekantstykker, dvs. linjestykker, som forbinder to punkter på Bézier-kurven, så skal vi først finde røringspunkterne for tangentterne. Det kræver lidt mere fingerfærdighed end ved parablerne. Hver af de sorte snore skal nemlig deles i det rigtige forhold: Forbindelseslinjen 1–1 deles i forholdet 1:8, forbindelseslinjen 2–2 deles i forholdet 2:8 osv. Derved kan man som vist sy den lyserøde Bézier-kurve.

1.2 Konstruktion af Bézier-kurven som geometrisk kurve

Vi konstruerer nu Bézier-kurven som en geometrisk kurve i et dynamisk geometri-program.

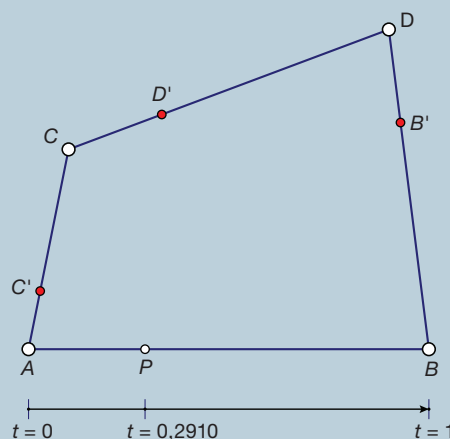
For at kunne arbejde videre med konstruktionen i næste øvelse vælges startpunktet A til at være koordinatsystemets begyndelsespunkt, dvs. $(0,0)$, og slutpunktet B vælges til at være enhedspunktet på den vandrette akse, dvs. $(1,0)$. Kontrolpunkterne C og D vælges tilfældigt.

1.



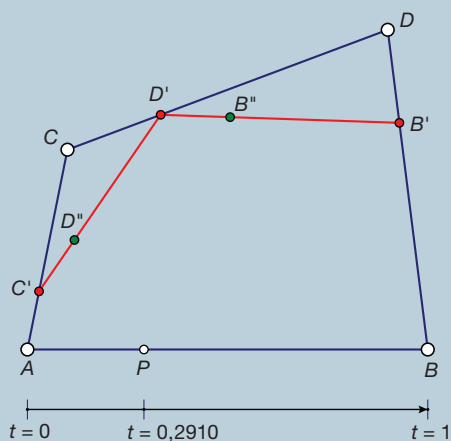
Vi begynder med at forbinde A og B med et linjestykke. På dette linjestykke afsætter vi et frit punkt P . Derefter måler vi forholdet, som P deler linjestykket AB i. Dette delingsforhold kaldes parameteren t . Parameteren t har altså værdien 0 i startpunktet A , værdien $\frac{1}{2}$ i midtpunktet og værdien 1 i slutpunktet B .

2.



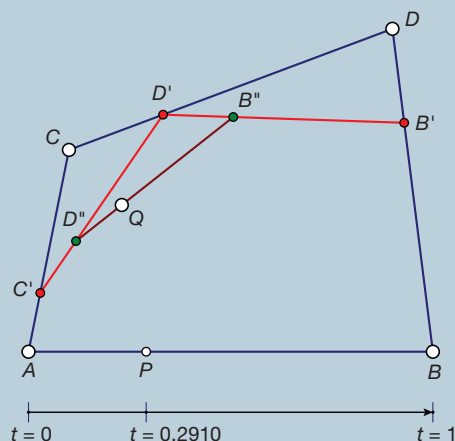
Dette delingsforhold overføres nu til linjestykkerne AC , CD og DB , som er de tre andre sider i firkanten, der repræsenterer omvejen over kontrolpunkterne. Det gøres ved hjælp af værktøjsprogrammets indbyggede multiplikationsværktøj, idet vi ud fra startpunktet multiplicerer slutpunktet med forholdet t . Derved fås de tre delepunkter: C' , D' og B' .

3.



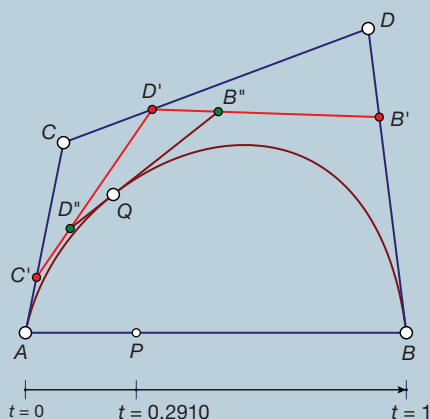
Vi forbinder så $C'D'$ med et linjestykke og tilsvarende $D'B'$ med et linjestykke og deler dem i det samme forhold – igen ved hjælp af multiplikationsværktøjet. Derved fås delepunkterne D'' og B'' .

4.

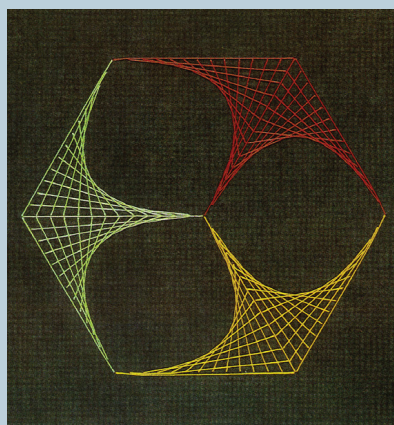


Endelig forbinder vi $D''B''$ med et linjestykke og deler dette i samme forhold ved hjælp af multiplikation. Det fremkomne delepunkt kaldes Q . $D''B''$ er tangent til Bézier-kurven i røringspunktet Q .

5.



Når styrepunktet P nu gennemløber den direkte vej fra A til B , vil følgepunktet Q gennemløbe Bézier-kurven. Kurven kan du få at se ved at udnytte værktøjsprogrammet muligheder for at spore punktet Q eller endnu bedre ved at konstruere kurven som det geometriske sted for følgepunktet Q drevet af styrepunktet P langs stien AB .



Seks parabelbuer syet i en regulær sekskant.

Øvelse 3.1 Formeludtryk for Bézier-kurvens koordinater

Vi vil nu undersøge Bézier-kurven lidt nærmere og forsøge at finde ud af, hvilke kurver der ligger bag Bézier-kurven. Vi vil undersøge sammenhængen mellem Q 's koordinater og parameteren t , som jo er bestemt af P 's beliggenhed på AB .

Aflæs koordinatsættet for følgepunktet Q samt værdien af parameteren t .

Flyt nu rundt på følgepunktet Q ved at trække i styrepunktet P , og konstruer på denne måde en tabel over sammenhørende værdier af t , x og y for punktet Q .

Undersøg grafen for x som funktion af t , henholdsvis y som funktion af t , ved hjælp af et værktøjsprogramms indbyggede regressionsmodeller, og overvej i hvert tilfælde, hvilken kurve der bedst beskriver samtlige punkter (t, x) og (t, y) fx begrundet i sammenligning af residualplot for hver af de valgte modeller.

Øvelsen fortæller, at Bézier-kurver i virkeligheden fremkommer ud fra tredjegradspolynomier. Du kan på bogens **website** finde et projekt, der mere indgående beviser sammenhængen mellem Bézier-kurver og tredjegradspolynomier.



Øvelse 3.2 Design en figur – og bestem forskrifterne

Benyt din konstruktion til at fremstille fx et par af passende Bézier-kurver, der tilsammen tegner et hjerte, eller en anden simpel figur, som du selv sætter som passende mål. Husk, at du kan udnytte programmets muligheder til fx at spejle, dreje osv.

Bestem som ovenfor sammenhørende værdier af t , x og y for punktet Q , og bestem forskrifterne for de tilhørende tredjegradspolynomier.